

EXERCÍCIOS PARA MATEMÁTICA FINANCEIRA

2008-2009

1. MERCADOS FINANCEIROS A TEMPO DISCRETO

Exercício 1. No contexto do modelo binomial multiperíodo e, com as notações utilizadas nos documentos, considere que $T = 3$, $S_0 = 10$, $u = 1.2$, $d = 0.8$, $R = 0.1$.

1. Represente num esquema em árvore, tal como realizou na aula prática, a evolução dos preços aproximados - com duas casas decimais - do activo com risco e colocando na última coluna o valor do cash flow de uma call option X , com strike price $K = 10$. Justifique os seus cálculos indicando as fórmulas que utilizou e, quais os sucessivos passos dos cálculos correspondendo a uma sub-árvore a um período.
2. Determine $\mathbb{Q} = (q_u, q_d)$, a probabilidade neutra face ao risco e construa a árvore binomial de preços aproximados para X - com duas casas decimais - representando-os, numa árvore binomial semelhante à usada na aula prática. Justifique os seus cálculos indicando as fórmulas que utilizou e, quais os sucessivos passos dos cálculos correspondendo a uma sub-árvore a um período.
3. Indique qual é o preço à data $t = 0$ de X .
4. Construa a carteira réplica de X à data $t = 0$ e verifique que se trata efectivamente de uma carteira réplica de X . Justifique os seus cálculos indicando as fórmulas que utilizou e quais os sucessivos passos dos cálculos.

Exercício 2. Descreva justificando a sua descrição com uma análise dos cash-flows gerados, a atitude de um investidor que considera investir em cada uma das combinações de direitos contingentes da tabela seguinte.

	Posição longa	Posição Curta	Denominação
1	Call(K)	Call(K') ($K' > K$)	Bullish vertical spread
2	Call(K)	Call(K') ($K' < K$)	Bearish vertical spread
3	Call(K) + 2 Put(K)		Strip
4	2 Call(K) + Put(K)		Strap
5	Call(K) + Call(K') ($K' > K$)		Strangle

Exercício 3. Defina uma carteira composta de calls e puts, todos com a mesma data de expiração, que reproduza o payoff da butterfly spread descrito na figura 1.

Exercício 4. Propor pelo menos um modelo para a distribuição de preços de um activo financeiro a partir de dados reais. Considerar dados de preços de uma companhia cotada em bolsa e proceder de acordo com uma metodologia estatística usual, nomeadamente:

- Traçar histogramas com os dados;

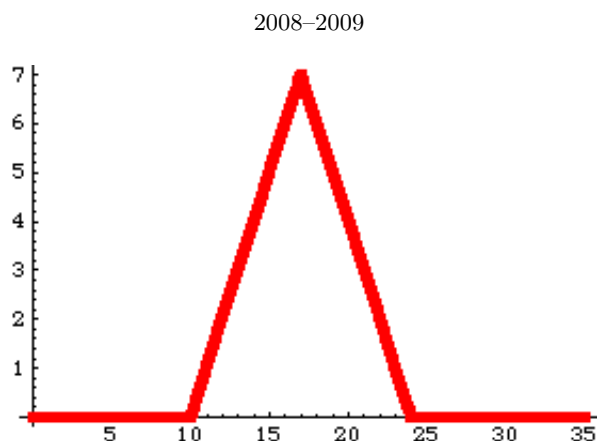


FIGURA 1. O gráfico do payoff de uma *butterfly spread*

- Escolher justificando um modelo paramétrico;
- Efectuar o ajustamento estimando os parâmetros do modelo
- Efectuar testes para averiguar da qualidade do modelo.

A resposta a esta questão poderá ser realizada em folha de cálculo e deverá incluir gráficos sempre que necessário para melhor explicitar as ideias subjacentes às respostas apresentadas.

Exercício 5. Fixe como parâmetros desta questão S_0 o preço inicial, T o número de períodos, u o factor ascendente de actualização do preço, d o factor descendente de actualização do preço e $p_u \in]0, 1[$ a probabilidade de um movimento ascendente.

1. Mostre que se S_n denotar o preço do activo com risco no modelo binomial multiperíodo à data $n \geq 1$ então para Z variável aleatória tal que:

$$\mathbb{P}[Z = u] = p_u = 1 - \mathbb{P}[Z = d]$$

e para $(Z_n)_{n \in \{1, 2, \dots, N\}}$ sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com Z se tem:

$$S_n = S_{n-1}Z_n = Z_n \times \dots \times Z_1 \times S_0 .$$

2. Mostre que a uma data $t \in \{0, \dots, T\}$ há $t + 1$ possibilidades para o preço S_t , possibilidades representadas por $\omega_1, \dots, \omega_{t+1}$ e implemente uma simulação que lhe permita obter, após M tiragens ao acaso de uma trajectória na árvore dos preços, uma distribuição das frequências para $S_t(\omega_1), \dots, S_t(\omega_{t+1})$. Deverá obter uma figura semelhante à figura 1.
3. Procure determinar um ajustamento para a distribuição de frequências obtida anteriormente. Pode justificar o resultado obtido?

Exercício 6. Esta questão visa obter uma aplicação prática do modelo binomial a dados reais.

1. Seleccione os preços de um activo (por exemplo, transaccionado na Euronext Lisboa) e determine os retornos aditivos e multiplicativos para os períodos considerados (diário, mensal, etc.). Determine o retornos médios (aditivo e multiplicativo) e as variâncias para os retornos aditivos e multiplicativos.

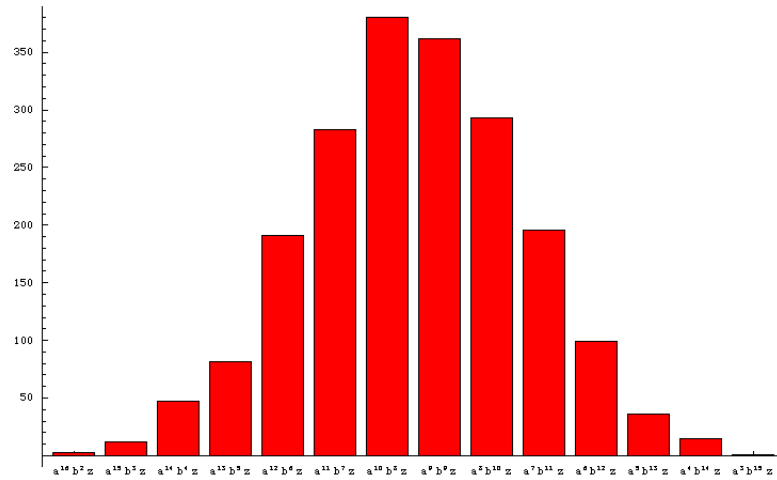


FIGURA 2. O gráfico de barras das freqüências dos pontos terminais de uma árvore binomial

2. Mostre que se o retorno médio multiplicativo for μ então o preço esperado ao fim do primeiro passo é $S_0 \exp(\mu \Delta t)$. Mostre que com as notações usuais (veja-se a segunda questão), se tem que o preço esperado ao fim do primeiro passo é também:

$$p_u S_0 u + (1 - p_u) S_0 d .$$

Conclua que:

$$p_u = \frac{\exp(\mu \Delta t) - d}{u - d} .$$

3. Mostre que se a variância para o retorno multiplicativo, no período observado, for representada por σ^2 então a variância para o retorno multiplicativo num intervalo de tempo com duração Δt é $\sigma^2 \Delta t$. Procedendo como na questão anterior e desprezando as potências de Δt de ordem superior a 1 se verifica que u e d dadas por

$$u = \exp(\sigma \sqrt{\Delta t}) \quad e \quad d = \exp(-\sigma \sqrt{\Delta t}) .$$

são soluções aproximadas da equação

$$e^{\mu \Delta t} (u + d) - ud - e^{2\mu \Delta t} = \sigma^2 \Delta t$$

que se obtém a partir da equação

$$p_u s u^2 + (1 - p_u) s d^2 + [p_u s u + (1 - p_u) s d]^2 = \sigma^2 \Delta t$$

que deverá justificar.

4. Aprece uma call option sobre o modelo que acabou de ajustar.

Exercício 7. Seguidamente apresentamos sob forma de tarefas, a serem desenvolvidas na aula, as alíneas do exercício. Para levar a cabo algumas destas tarefas pode revelar-se necessário propor um algoritmo e, em seguida, procurar a melhor forma de implementar esse algoritmo utilizando as funcionalidades de ajuda de uma calculadora, do Mathematica ou do Excel.

1. *Insira como dados para o estudo do modelo binomial os seguintes valores. $T = 30$, $R = .001$, $s = 100$, $u = 1.002$, $d = .998$, $K = 100$.*
2. *Determine a partir dos dados a probabilidade de martingala $\mathbb{Q} = (q_u, q_d)$.*
3. *Defina a função Contrato como sendo uma put option, tendo como variáveis o preço do activo e o Strike Price.*
4. *Obtenha representações gráficas da função Contrato e das suas secções que se obtêm considerando a função a uma variável que é dada quando se fixa a outra variável.*
5. *Defina o preço no modelo binomial do contrato como uma função denominada Preço e dada como função das variáveis s, T, R, u, d, K .*
6. *Obtenha representações gráficas da secção na variável K , da função Preço.*
7. *Obtenha o preço do contrato indicado acima por meio de simulação de Monte-Carlo e compare com o valor apresentado pela fórmula.*
8. *Construa a carteira réplica do contrato e apresente os valores para os dados fornecidos.*
9. *Utilizando dados reais refaça o estudo anterior, ajustando os parâmetros u e d criando um direito contingente, à sua escolha, adequado a um problema prático que descreverá.*

Exercício 8. *Considere os dados seguintes correspondentes à evolução do Psi-20, de 24 de Janeiro de 2000 a 14 de Setembro de 2007, após estimação e/ou calibração. A taxa de juro anual $R=4.1\%$, $u=1.01142$, $d=0.988581$, $S_0 = 7307.99$, $K=7171.83$, $T=10$.*

1. *No quadro do modelo binomial a um período:*
 - (a) *Determine por simulação o preço de uma Call option, com os dados acima.*
 - (b) *Estude estatisticamente o processo de simulação da alínea anterior.*
2. *No quadro do modelo binomial multi-período:*
 - (a) *Determine por simulação o preço de uma Call option com os dados acima.*
 - (b) *Estude estatisticamente o processo de simulação da alínea anterior.*